Đáp án Toán 1

Câu 1: a) Diện tích bề mặt khi $t = 2$

$$S = 4\pi[r(2)]^2 \qquad (0.5)$$

Từ đó $r(2) = 2.2 = 4$

Vậy $S = 4\pi(4)^2 = 64\pi$ (đvdt) (0.5)

b) Công thức tính diện tích bề mặt theo thời gian

$$S(t) = S\circ r(t) = S(r(t)) = 4\pi[r(t)]^2 \qquad (0.5)$$

$$= 4\pi(2t)^2 = 16\pi t^2 \qquad (0.5)$$

Câu 2: a) Với $x > 2$ hoặc $x < 2$ ta có $f(x)$ là một hàm số sơ cấp nên liên tục trên $(-\infty, 2)$ và $(2, \infty)$. Do đó f liên tục với mọi x khi f liên tục tại $x = 2$. (0.25)

$f(2) = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(ax^2+16) = 4a+16$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(bx-2) = 2b-2$ 0.75

Vì vậy f liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ 0,25

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+16 = 4 \\ 2b-2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \end{cases}$ 0,25

b) Với $a = -3$ và $b = 3$, ta có

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-3x^2+16-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{-3(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} -3(x+2)$$

$= -12$ 0,25

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{3x-2-4}{x-2}$$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} 3 = 3$ 0,25

Vì vậy f không khả vi tại $x = 2$

Câu 3: Lấy đạo hàm hai vế phương trình theo x ta được

$$y + xy' + \cos x = 0$$

$$y' = -\frac{y+\cos x}{x} \qquad (0,5)$$

Tại $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ta có

$$y'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -\frac{0+\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad (0,25)$$

Vậy pt tiếp tuyến cần tìm

$$y = y'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) + 0 \qquad (0,25)$$

$= 0$

Câu 4. Theo đề bài ta có

$$Q(p) = 4p^2 + 8p + 8$$

với $p = 27$ (nghìn người) và

$\frac{dp}{dt} = 3$ nghìn người/năm 0,25

Tốc độ tăng của mức độ ô nhiễm

$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}$ 0,25

$= (8p+8)\frac{dp}{dt} = (8.27+8).3$ 0,25

$= 672$ 0,25

Câu 5. Ta có

$$P'(I) = \frac{100(I^2+I+4) - 100I(2I+1)}{(I^2+I+4)^2}$$

$= 100\dfrac{-I^2+4}{(I^2+I+4)^2}$ 0,5

$P'(I) = 0 \Leftrightarrow -I^2+4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I = 2 \\ I = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$ 0,25

I	0		2		∞
$P'(I)$		$+$	0	$-$	
$P(I)$	0	$\nearrow$	20	$\searrow$	0

Vậy $\max\limits_{[0,\infty)} P = 20$ tại $I = 2$ 0,25

Câu 6. Ta có

$f'(x) = (1-x^2)e^{x^2}$ 0,5

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại do } x \geq 0) \end{array}\right.$ 0,25

x	0		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy f tăng trên $(0,1)$ và giảm trên $(1,\infty)$ 0,25

Câu 7. Viết lại pt

$$\frac{dT}{T-20} = k\,dt$$

$\displaystyle\int\frac{dT}{T-20} = \int k\,dt$ 0,25

$\ln|T-20| = kt + C$ 0,5

$T - 20 = e^{kt+C} = C_1e^{kt}$

$T(t) = 20 + C_1e^{kt}$ 0,25

$T(0) = 20 + C_1 = 90 \Leftrightarrow C_1 = 70$ 0,25

$T(30) = 20 + C_1e^{30k} = 61$

$\Leftrightarrow e^{30k} = \frac{31}{70} \Leftrightarrow 30k = \ln\frac{31}{70}$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{30}\ln\frac{31}{70}$ 0,25

Vậy $T(t) = 20 + 70e^{kt}$ với $k = \frac{1}{30}\ln\frac{31}{70}$

b) Nhiệt độ trung bình trong nửa giờ đầu

$T_{ave} = \dfrac{1}{30-0}\displaystyle\int_0^{30} T(t)\,dt$ 0,25

$$= \frac{1}{30}\int_0^{30}\left(20 + 70e^{kt}\right)dt$$

$$= \frac{1}{30}\left(20t + \frac{70}{k}e^{kt}\right)\Big|_0^{30}$$

$= \dfrac{1}{30}\left[600 + \dfrac{70}{k}e^{30k} - \dfrac{70}{k}\right]$ 0,25

với $k = \frac{1}{30}\ln\frac{31}{70}$.